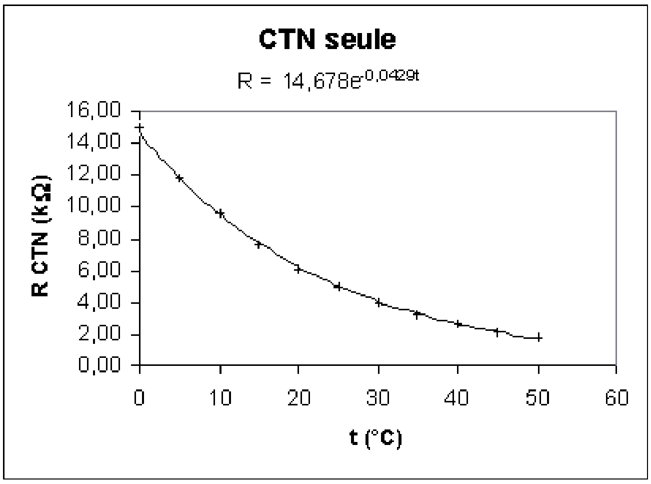
REALISATION D'UN CAPTEUR DE TEMPERATURE A C.T.N.
LINEARISATION & OPTIMISATION

Résumé: Dans le cadre de l'option M.P.I. on réalise un capteur de température. L'étude d'une C.T.N. permet d'aborder les notions de linéarisation de la chaîne de mesure. On comparera ici la linéarisation obtenue à l'aide du tableur EXCEL et celle obtenue par méthode analytique.

I Etude de la C.T.N. et modélisation.

On étudie directement à l'ohmmètre les variations en fonction de la température de la résistance d'une C.T.N. plongée dans de l'eau (bien sur la C.T.N. est protégée de l'eau par exemple avec un bout de gaine thermorétractable).
Résultats:

t (°C)	R CTN (kW)
0	15,06
5	11,85
10	9,65
15	7,60
20	6,10
25	4,95
30	4,02
35	3,23
40	2,64
45	2,15
50	1,75

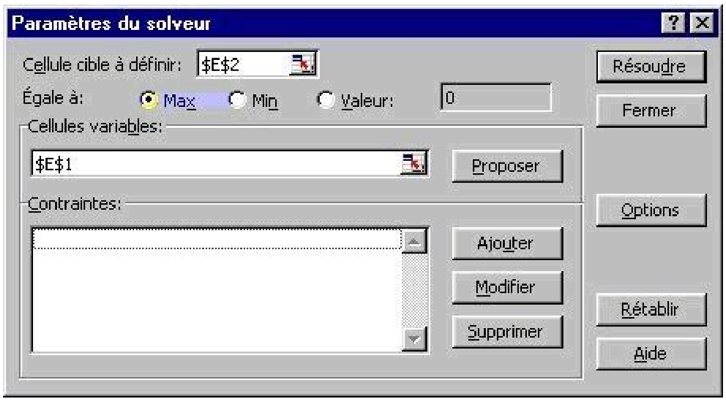


On obtient le modèle suivant: la résistance de la C.T.N. varie en fonction de t dans l'intervalle considéré (0°C – 50°C) selon $R = a\,e^{-bt}$ avec a = 14,68 kΩ et b = 0,043 $°C^{-1}$

II Linéarisation.

On va réaliser le montage suivant: mettre la C.T.N. en parallèle avec une résistance de valeur constante R. On calcule la résistance équivalente $R_{éq}$ au montage en parallèle, et on cherche à avoir la fonction $R_{éq}$ (t) le plus linéaire possible. (Il faudrait en fait dire "affine", mais l'usage des physiciens impose le terme linéaire, par ailleurs on imagine mal écrire "affinisation d'un capteur", on gardera donc de manière impropre le terme linéaire)
Sous EXCEL, on crée une cellule R, on y met une valeur quelconque par exemple 2 kΩ, on calcule alors $R_{éq}$,on crée également une cellule "coefficient de détermination", on y écrit la formule suivante =coefficient.determination(y_connus;x_connus) où y_connus est la colonne des $R_{éq}$ et x_connus est la colonne des températures. (C'est beaucoup plus facile à faire qu'à expliquer !)
Le coefficient de détermination caractérise une courbe plus ce nombre est proche de 1 plus la courbe se rapproche d'une droite et donc plus la fonction correspondante est affine.

t (°C)	R CTN (kW)	$R_{éq}$	R	2,00
0	15,06	1,77	Coeff déter	0,99
5	11,85	1,71		
10	9,65	1,66		
15	7,60	1,58		
20	6,10	1,51		
25	4,95	1,42		
30	4,02	1,34		
35	3,23	1,24		
40	2,64	1,14		
45	2,15	1,04		
50	1,75	0,93		



Choisir alors le menu: outils solveur, et renseigner la fenêtre du solveur de la manière suivante: cellule cible E2 (adresse du coeff. de déterminat.), égale à Max; Cellules variables: E1 (adresse de la cellule R), cliquer sur Résoudre.

Le solveur vous propose alors une valeur de R permettant de maximiser le coefficient de détermination, donc de linéariser au mieux R = 4,39 kΩ. Accepter le résultat, on obtient:

t (°C)	R CTN (kW)	$R_{éq}$	R	4,39
0	15,06	3,40	Coeff déter	1,00
5	11,85	3,20		
10	9,65	3,02		
15	7,60	2,78		
20	6,10	2,55		
25	4,95	2,33		
30	4,02	2,10		
35	3,23	1,86		
40	2,64	1,65		
45	2,15	1,44		
50	1,75	1,25		

On trace alors le graphe $R_{éq}(t)$, on obtient le document de l'annexe .

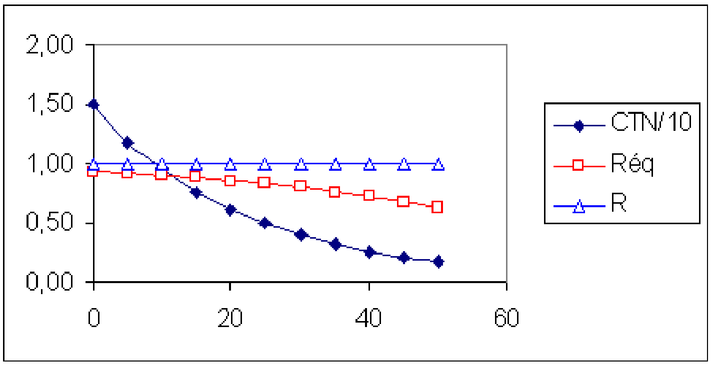
Soit comme modèle: $R_{éq}$ =-0,044t +3,43

Tout cela paraît un peu magique, essayons une interprétation….

III Interprétation qualitative.

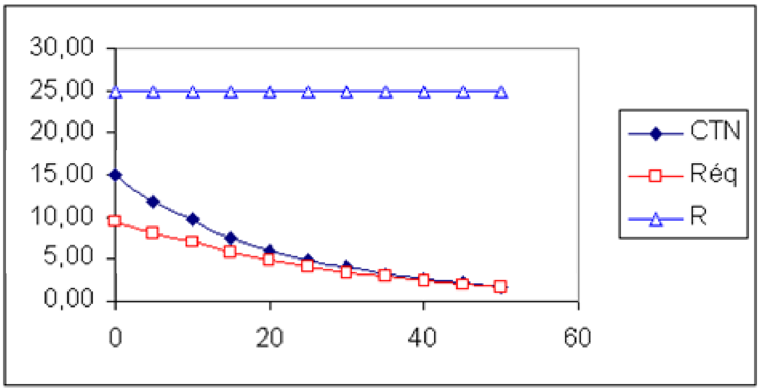
Supposons que nous mettions en parallèle sur la C.T.N. une résistance R < R_{CTN} par exemple R = 1 kΩ. C'est dans celle-ci que pour l'essentiel le courant passera. La résistance de l'ensemble sera voisine de celle de R. Plus précisément: pour les faibles températures (correspondant à R_{CTN} élevée), l'ensemble se comportera comme R et on aura une $R_{éq}$ horizontale, tangente à la droite R = cte. Plus la température s'élève et plus R_{CTN} diminue, elle laisse alors passer de plus en plus de courant et influe sur la forme de $R_{éq}$ qui prend alors une concavité vers le bas. Ceci est visualisé sur le modèle ci-dessous. (Pour plus de clarté, on a réduit l'échelle sur R_{CTN} d'un facteur 10)

:< R_{CTN}
oncavité vers le
as



Si maintenant nous mettons en parallèle sur la CTN une résistance élevée $R > R_{CTN}$ (par ex 25 kΩ) l'ensemble se comportera comme la CTN et la concavité de la courbe $R_{éq}(t)$ sera vers le haut.

$R > R_{CTN}$ concavité vers le haut



Intuitivement pour R prenant des valeurs intermédiaires $R \approx R_{CTN}$ la concavité sera nulle et on aura affaire à une droite….

IV Les joies du calcul.

Adoptons comme modèle: $R_{CTN} = ae^{-bt}$, On calcule la résistance équivalente: $R_{éq} = \frac{ae^{-bt}.R}{ae^{-bt}+R}$

On calcule successivement la dérivée première: $\frac{dR_{éq}}{dt} = -\frac{abR^2e^{-bt}}{(R+ae^{-bt})^2}$

(Le lecteur vérifiera les calculs…)

Puis la dérivée seconde: $\frac{d^2R_{éq}}{dt^2} = \frac{abR^2[be^{-bt}(R+ae^{-bt})^2+e^{-bt}.2(R+ae^{-bt})(-abe^{-bt})]}{(R+ae^{-bt})^4}$

qui après toutes simplifications est du même signe que: $[R-ae^{-bt}]$

Donc *in fine* $\frac{d^2R_{éq}}{dt^2} = 0$ pour $R= R_{CTN}$.

On va donc choisir d'annuler la dérivée seconde et donc la concavité de la courbe pour le point milieu de l'intervalle choisi soit 25°C. On adoptera $R = R_{CTN}$ (25°C) = 4,95 kΩ.Par la suite cette valeur sera nommée R_{25}.

La dérivée seconde est désormais du signe de $[R_{25} - R_{CTN}]$

En ce point la pente moyenne est alors de $\frac{dR_{éq}}{dt} = \frac{-bR_{25}ae^{-bt}}{(R_{25}+ae^{-bt})^2} = \frac{-bR_{25}}{4}$ = -0,053 $\Omega.°C^{-1}$.

On peut même prévoir que pour $R_{CTN} > R_{25}$ la dérivée seconde est négative et la concavité de la courbe $R_{éq}$ (t) sera vers le bas, et vers le haut pour $R_{CTN} < R_{25}$.

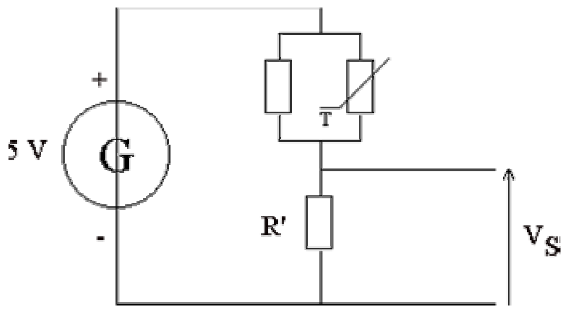
On retrouve bien l'allure de la courbe donnée en annexe 1.

Le modèle de la résistance équivalente est alors: $R_{éq} = \alpha t + \beta$, avec $\alpha = -0,053\ \Omega.°C^{-1}$

et $\beta = R_{éq}$ (0°C) = $\frac{R_{25}R_{CTN}(0°C)}{R_{25}+R_{CTN}(0°C)}$ =3,72 kΩ

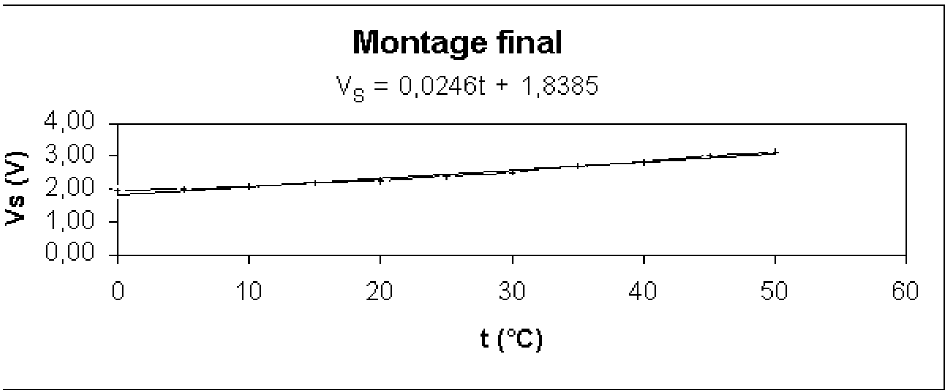
V Pour en finir.

Le but du montage est de mesurer une tension, et non pas une résistance. On va donc réaliser le montage suivant:



Il s'agit de trouver la valeur de R' à utiliser pour avoir $\frac{dVs}{dt}$ le plus grand possible.
Solution Excel: calculer au tableur V_S, créer une cellule pente. Sous EXCEL, on crée une cellule R', on y met une valeur quelconque par exemple 2 kΩ, on calcule alors V_S ,on crée également une cellule "pente", on y écrit la formule suivante =pente(y_connus;x_connus) où y_connus est la colonne des V_S et x_connus est la colonne des températures.
Un dernier appel au solveur pour maximiser la pente donne R' = 2,14 kΩ (résultat classique, il faut R' ≈ $R_{éq}$). On obtient alors la courbe $V_S(t) = 0,025t + 1,84$

t (°C)	R CTN (kW)	$R_{éq}$	Vs	R'	2,14
0	15,06	3,40	1,93		
5	11,85	3,20	2,00	pente	0,025
10	9,65	3,02	2,07		
15	7,60	2,78	2,17		
20	6,10	2,55	2,28		
25	4,95	2,33	2,39		
30	4,02	2,10	2,52		
35	3,23	1,86	2,67		
40	2,64	1,65	2,82		
45	2,15	1,44	2,98		
50	1,75	1,25	3,15		



Solution par le calcul:

$V_S = \frac{E.R'}{R'+R_{éq}}$ on dérive par rapport à t pour chercher à maximiser la pente, on trouve avec

R = αt + β, une pente p = $\frac{dV_s}{dt} = \frac{-E\alpha R'}{(R'+R_{éq})^2}$ cette pente sera maximale pour

$\frac{dp}{dR'} = \frac{-E.\alpha.(R'+R_{éq})[2R'-(R_{éq}+R')]}{(R'+R_{éq})^4}$ soit enfin R' = $R_{éq}$ = 2,48 kΩ

L'équation finale sera: $V_s = 2{,}67.10^{-2}$ t + V_S(0°C) En calculant V_S(0°C) avec les valeurs de R_{CTN} et R, on trouve V_S(0°C) = 2V. V_s = $2{,}67.10^{-2}$ t + 2
(Attention pour les A.N. depuis le début l'unité de R est le kΩ !!)

Comparaison des méthodes:

	Avec EXCEL	Modèle mathématique
R parallèle sur la CTN	4,39 kΩ	4,95 kΩ
$R_{équivalent}$ (t)	-0,044t + 3,43	-0,053t + 3,72

$R'_{série}$	2,14 kΩ	2,48 kΩ
$V_s(t)$	0,025t + 1,84	0,027t + 2

VI En guise de conclusion.

Il est bien sur hors de question de raconter tout cela aux élèves de seconde M.P.I. !!!

Par contre on peut avec un capteur C.T.N. aborder les notions de capteur non linéaire et de linéarisation. Il suffira d'indiquer la nécessité de mettre en parallèle sur la C.T.N. une résistance égale à environ la résistance mesurée au milieu de la plage de température à linéariser (soit $R_{//} = R_{CTN}(25°C)$), et en série une résistance moitié de la précédente, de façon à pouvoir obtenir un montage permettant de mesurer une tension et non une résistance.

Cette démarche me paraît préférable à celle utilisant un capteur trop "parfait" type LM335, pour lequel il n'y a rien à faire.

Enfin, la grande dispersion des valeurs d'une CTN à l'autre au sein de la même classe permettra d'aborder justement la notion de dispersion des résultats.

Annexe: $R_{éq}$ linéarisé par EXCEL, on remarque l'ondulation des valeurs réelles par rapport aux valeurs du modèle linéaire.
Pour $R_{CTN} > R_{25}$ la concavité est orientée vers le bas, et pour $R_{CTN} < R_{25}$ la concavité est tournée vers le haut.